

Pinchover-Rubinstein Exercise 5.7 (p.126)

Horváth Domonkos, Józsa Gergely

1. Feladat

Adjuk meg a következő hővezetési probléma megoldását!

$$\begin{aligned}u_t' - ku_{xx}'' &= A \cos \alpha t & 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{R}^+ \\u_x'(0, t) &= u_x'(1, t) = 0 & t \geq 0 \\u(x, 0) &= 1 + \cos^2 \pi x & 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

2. Megoldás

1. A keresett függvényt először felbontjuk homogén és inhomogén részre, vagyis $u = v + w$ alakú megoldás után kutatunk. A kezdeti feltételt osszuk el a következőképp:

$$\begin{aligned}v(x, 0) &= 1 + \cos^2 \pi x \\w(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

2. Homogén megoldás

Tekintsük a problémát valamivel általánosabban:

$$\begin{aligned}v_t' - kv_{xx}'' &= 0 & 0 < x < L, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{R} \\v_x'(0, t) &= v_x'(L, t) = 0 & t \geq 0 \\v(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L\end{aligned}$$

A feladatot a változók szétválasztásának módszerével próbáljuk megoldani. Feltételezzük, hogy a szóban forgó kétváltozós függvény előáll két egyváltozós függvény szorzataként:

$$v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Ekkor a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}v_t' &= T'X \\v_{xx}'' &= TX''\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, átrendezve, majd bevezetve a szeparációs konstans fogalmát:

$$\begin{aligned}v_t' - kv_{xx}'' &= T'X - kTX'' = 0 \\T'X &= kTX'' \\ \frac{T'}{kT} &= \frac{X''}{X} =: -\lambda\end{aligned}$$

A fenti egyenlet egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerre esik szét, amelyben a kapcsolatot λ tartja fenn:

$$T'(t) = -k\lambda T(t) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad 0 < x < L \quad (2)$$

(2) Foglalkozzunk először az utóbbi, a másodrendű differenciálegyenlettel. A probléma nemtriviális megoldása az ún. sajátfüggvény, λ sajátértékkal. A megoldás alakja a sajátértéktől függ. Szükségünk lesz a deriváltra vonatkozó peremfeltételekre, amelyek az eredeti PDE peremfeltételeiből kaphatók meg:

$$\begin{aligned}v'_x(0, t) &= T(t) \cdot X'(0) = 0 \\v'_x(L, t) &= T(t) \cdot X'(L) = 0\end{aligned}$$

Mivel nemtriviális megoldást keresünk ($v(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0$), ezért $T(t) \neq 0 \forall t$ -re, így

$$X'(0) = X'(L) = 0$$

a) Negatív sajátérték ($\lambda < 0$) esetén a megoldás:

$$X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Amely megfelelő átalakítással:

$$X(x) = \tilde{\alpha} \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + \tilde{\beta} \sinh \sqrt{-\lambda}x$$

A deriváltra vonatkozó peremfeltételekből adódóan azonban

$$\begin{aligned}X'(0) &= \tilde{\alpha} \cosh(0)\sqrt{-\lambda} + \tilde{\beta} \sinh(0)\sqrt{-\lambda} = 0 & \longrightarrow & \tilde{\beta} = 0 \\X'(L) &= \tilde{\alpha} \cosh(\sqrt{-\lambda}L)\sqrt{-\lambda} = 0 & \longrightarrow & \tilde{\alpha} = 0\end{aligned}$$

Mivel így $X(x) = 0$ lenne $\forall x$ -re, ezért $\lambda \not< 0$.

b) Nulla sajátérték ($\lambda = 0$) esetén a sajátfüggvény $X(x) = \alpha + \beta x$ alakú, és hasonlóan

$$X'(L) = \beta L = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta = 0$$

Tehát ennél a sajátértéknél a megoldás mindenhol konstans értéket venne fel ($X(x) \equiv \alpha$). Ez azonban ellentmond a PDE kezdeti feltételének, így $\lambda \neq 0$.

c) Pozitív sajátértéknél ($\lambda > 0$) a megoldás:

$$X(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\begin{aligned}X'(0) &= -\alpha \sin(0)\sqrt{\lambda} + \beta \cos(0)\sqrt{\lambda} = 0 & \longrightarrow & \beta = 0 \\X'(L) &= -\alpha \sin(\sqrt{\lambda}L)\sqrt{\lambda} = 0 & \longrightarrow & \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0\end{aligned}$$

A kapott összefüggés következtében $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), így a keresett sajátérték és sajátfüggvény:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) = \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ilyen módon a feladatnak sajátfüggvények egy végtelen láncolata is eleget tesz:

$$X_n(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

(1) Megoldva az elsőrendű differenciálegyenletet azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}T(t) &= \beta e^{-k\lambda t} \\T_n(t) &= \beta_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

A homogén megoldás a két függvény szorzata:

$$v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \beta_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Felhasználva a szuperpozíció elvét, igaz lesz, hogy

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^N B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^N B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

ahol értelemszerűen B_0 jelöli a konstans tagot. Így ha a kezdeti feltétel alakja

$$f(x) = \sum_{n=0}^N B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

akkor ebből könnyedén meghatározhatók a B_n együtthatók, és a homogén megoldás összerakható.

Visszakanyarodva az eredeti hővezetési feladathoz, "szerencsére" ott éppen ilyen formán van a kezdeti feltétel megadva, hiszen

$$f(x) = 1 + \cos^2 \pi x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x),$$

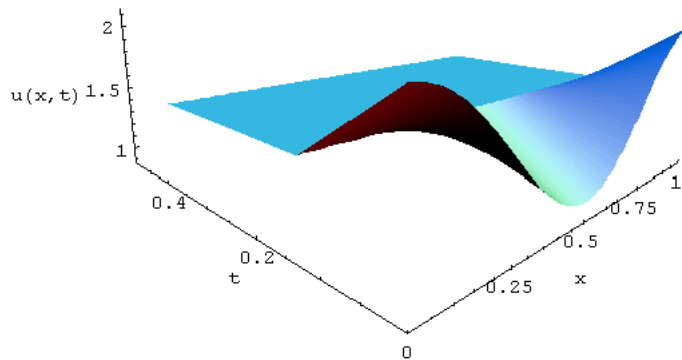
és innen a megoldásban szereplő koefficiensek:

$$B_0 = \frac{3}{2} \quad B_2 = \frac{1}{2}$$

A homogén megoldás tehát:

$$v(x, t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) e^{-4k\pi^2 t}$$

Ábrázolás, fizikai interpretáció: A (Neumann típusú) peremfeltételek a rendszer zártságát fejezik ki. A kiindulási hőmérsékleteloszlás (kezdeti feltétel) exponenciális lecsengését a k hővezetési együttható határozza meg, amely a vezető közeg minőségétől függ. Így a hőmérséklet idővel egyenletesen oszlik el, az elszigeteltség és a belső hőtermelés hiányának következtében aszimptotikusan tart a kezdeti átlaghőmérsékletéhez ($\frac{\int_0^L f(x) dx}{L}$).



1. ábra. Homogén megoldás $k = 2$, $A = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ paraméterekkel

Megjegyzés: A kezdeti feltétel fentebb leírt (kedvező) előállítása nem mindig valósítható meg. Általános függvény esetén (pl. $f(x) = x$, $0 < x < L$) felmerül a kérdés, hogy miként lehetne a problémát orvosolni. Fourier ötlete nyomán tudjuk, hogy tetszőleges, a peremfeltételeket kielégítő f függvény előállítható a sajátfüggvények végtelen lineáris kombinációjaként, azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ezt a reprezentációt nevezik általánosított Fourier-sorfejtésnek. Ebben az esetben értelmezzük az általánosított szuperpozíció elvét is, ha a sor egyenletesen konvergens a megoldás értelmezési tartományán. Ilyenkor a formális felírás:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Az együtthatók kiszámolására vonatkozó összefüggés (levezetése a könyvbelihez hasonlóan végezhető):

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx$$

3. Inhomogén megoldás

A PDE jobb oldalán szereplő tag egyváltozós, így az inhomogén rész megoldását $w(x, t) = w(t)$ alakban keressük. A eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$w'_t(x, t) - kw''_{xx}(x, t) = \frac{d}{dt}w(t) = A \cos \alpha t$$

Innen a keresett függvény (az inhomogén kezdeti feltétel figyelembevételével):

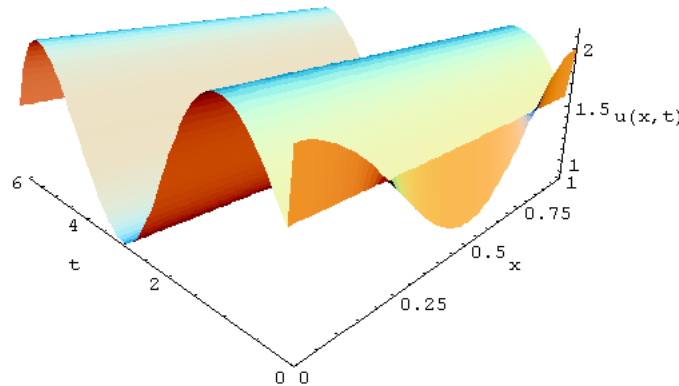
$$w(t) = \frac{A}{\alpha} \sin(\alpha t)$$

4. Végső megoldás

A levezetés elején ismertetett módszer szerint összeillesztjük a két függvényt:

$$u(x, t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) e^{-4k\pi^2 t} + \frac{A}{\alpha} \sin(\alpha t)$$

Ábrázolás: A homogén megoldásnál használt paraméterekkel. A kezdeti hőeloszlás kisimulása után a rendszer felveszi a belső hőingadozás okozta kényszerrezgést.



2. ábra. Hővezetési feladat megoldása

1. *Megjegyzés:* A hővezetési egyenlet a parabolikus PDE-k sorába tartozik, így a hullámegyenletnél látottakkal ellentétben a kezdeti feltételben található szingularitások nem gyűrűznek tovább, hanem azonnal elsimulnak.

2. *Megjegyzés:* Magasabb dimenzióban, homogén esetben az egyenlet $u'_t - k\Delta u = 0$ alakú. Egyensúlyi helyzetben ($u'_t \rightarrow 0$) a kifejezés Laplace-egyenletté egyszerűsödik, a hőmérsékleti mező tehát harmonikus lesz. Inhomogén esetben a PDE ilyenkor Poisson-egyenletté alakul, amely a térrész állandósult állapotbeli hőeloszlását reprezentálja.